ÁREAS DE ATRACCIÓN ESCOLAR. MODELOS MATEMÁTICOS PARA SU ESTUDIO

Por José Luis Rodríguez Diéguez

1) *Planteamiento del problema*

Estamos asistiendo a la tensión entre dos conceptos, divergentes en su apariencia, pero claramente convergentes en su intencionalidad. De una parte, la descentralización administrativa como exigencia en aras de una mayor fluidez y autonomía. De otra, la concentración de empresas y servicios en busca de una unidad-tipo que conjugue el menor coste con el más perfecto servicio.

En el campo escolar esta doble tendencia se manifiesta en la creación de nuevas Universidades que descongestionen las existentes, y las Concentraciones Escolares en Enseñanza Primaria. La búsqueda de unos límites mínimos y máximos cuya rentabilidad no se resienta se abre a dos vertientes conducentes a una misma solución: la ubicación del centro de enseñanza y la definición del área de atracción de cada uno.

El concepto de "Distrito Universitario" para definir el área de atracción a este nivel de enseñanza se resiente, al parecer, de su matiz puramente burocrático. Y el "distrito escolar", la "comarca" y la "subcomarca" como característicos de la concentración escolar son bastante vagos e imprecisos.

No pretendemos con este estudio dar una solución definitiva a estos problemas. Tan sólo acercarnos a ellos e intentar, en la medida de lo posible, señalar vías que tal vez arrojen alguna luz sobre su planteamiento.

2) *Las soluciones en la Organización de Empresas*

Esta doble vertiente, la ubicación del centro y su área de atracción, está definida de alguna manera en el campo de la organización de empresas. Vamos a considerar algunas de las soluciones existentes.

2.1. La "Ley de Gravitación Comercial".

En 1929, Reilly formula su "Ley de Gravitación Comercial", que podríamos expresar así:

El volumen de ventas de una población A a otra, C, está en razón directa de la población de A, y en razón inversa del cuadrado de su distancia.

Representándolo gráficamente:

```
B           C           A
!-----------!-----------!
```

Podríamos definir el volumen proporcional de ventas de las ciudades A y B con relación a C, en función de sus poblaciones respectivas (P_A y P_B) y de sus distancias, mediante la fórmula

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{P_A}{P_B}\left(\frac{D_B}{D_A}\right)^2$$ [1]

2.2. Los "Centros de Gravedad".

Con un sentido menos operativo, pero enormemente interesante para el planteamiento de una política escolar, podríamos pensar en la determinación de los "Centros de Gravedad Escolar", transfiriendo los módulos utilizados por Ra-

[1] REILLY, J.: *Methods for the study of retail relationships*, University of Texas. "Bulletin" n.º 2.944, 1929. Puede estudiarse su formulación, así como algunas variantes introducidas por otros autores en FERNÁNDEZ PIRLA, J. M.: *Economía y gestión de la Empresa*, Madrid, Imp. de Pablo López, 1967, págs. 137-146.

món Tamames para el estudio de fenómenos económicos y demográficos [2].

Utiliza para ello las siguientes fórmulas:

$$\text{Latitud} = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i P_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i}$$

$$\text{Longitud} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i}$$

Por medio de las cuales obtiene medias ponderadas de longitud y latitud en función del peso intrínseco de cada provincia en el factor que analiza, y según los valores que en longitud y latitud corresponden a cada capital de provincia.

2.3. La programación lineal por el método "Simplex".

El objetivo central de la programación lineal consiste en conseguir la optimación de los costes o los rendimientos de un conjunto de operaciones ligadas mediante una serie de ecuaciones con varias incógnitas.

Un problema típico de solución mediante el "simplex" es el que se formula, por ejemplo, en función del rendimiento máximo de una serie de máquinas cuyas operaciones permiten obtener más de un producto con distintas ganancias y rendimiento de unidades por hora.

Así, dos máquinas cuyo rendimiento máximo anual en horas de trabajo es 2.000, y mediante las cuales se pueden

---

2 TAMAMES, R.: *Los Centros de Gravedad de la Economía Española*, Madrid, Guadiana, 1968, págs. 125-126.

realizar dos productos x_1 y x_2, con los siguientes condicionantes:

El producto x_1 necesita, por cada unidad realizada, dos horas de trabajo en la máquina 1, y 4 horas en la máquina 2.

El producto x_2 exige, por unidad, 5 horas de trabajo en la máquina 1 y 2 horas en la máquina 2.

El producto x_1 supone una ganancia de 40 ptas. por unidad, y el producto x_2 una ganancia de 55 ptas.

Con estos datos, la formulación del problema es la siguiente:

$$(a) \quad 2\,x_1 + 5\,x_2 \leqslant 2.000$$
$$(b) \quad 4\,x_1 + 2\,x_2 \leqslant 2.000$$

Ya que las 2.000 horas de trabajo de dichas máquinas es el máximo posible.

Una condición claramente expresa en la índole económica del problema es

$$x_1 \geqslant 0$$
$$x_2 \geqslant 0$$

Ya que no cabe concebir una solución negativa en ninguna de las dos incógnitas.

La solución que se obtenga debe satisfacer además la formulación de lo que se conoce como "función objetivo" o "función económica":

$$Z = 40\,x_1 + 55\,x_2 = \text{(un máximo)}.$$

La solución a este problema se suele hallar mediante la conversión de las desigualdades *(a)* y *(b)* en igualdades mediante la adición de dos nuevas incógnitas, x_3 y x_4, que se utilizan para constituir en igualdad, en principio, las dos desigualdades del sistema, y para proporcionar una matriz unidad que sirva como base vectorial inicial para buscar las soluciones del problema.

Así, *(a)* se convierte en

$$2\,x_1 + 5\,x_2 + x_3 = 2.000$$

Y *(b)* en

$$4x_1 + 2x_2 + x_4 = 2.000$$

La formulación matricial sería:

$$x_1\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2.000\\2.000\end{bmatrix}$$

Con lo cual los vectores

$$P_3 = |1 \quad 0| \quad \text{y} \quad P_4 = |0 \quad 1|$$

formarían una matriz unidad de orden 2×2, que permitiría definir en un espacio de dos dimensiones la formulación y solución inicial del problema.

La determinación de costes y el examen de la función objetivo nos permitirá, sustituyendo vectores básicos, llegar a la solución óptima mediante sucesivas iteraciones [3].

Este modelo matemático del "simplex" nos puede servir para solucionar el problema ya clásico del transporte: dados una serie de orígenes y una serie de destinos, buscar la combinación más favorable y económica en el transporte.

La formulación genérica para este tipo de problemas es, en lo relativo a su función económica, la siguiente:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}, \text{ para } j = 1, 2, \ldots m = \text{(un mínimo)}$$

donde c_{ij} = coste del traslado desde el origen i hasta el destino j y x_{ij} = número de unidades trasladadas desde i hasta j.

Las restricciones o sistemas de ecuaciones tendrían la forma

$$x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1m} = y_1$$
$$x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2m} = y_2$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$

3 HOLZMAN, A. G. y otros: *Bases matemáticas para las decisiones en la Empresa: matrices y programación matemática.* Encyclopedia Britannica Press. Chicago, tomo II, págs. 386-395.

$$x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nm} = y_n$$

lo cual podría ser expresado como

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \sum y_j, \text{ para } j = 1, 2, \ldots m.$$

3) *Las limitaciones en el área escolar*

3.1. La ley de gravitación comercial.

La conversión de la ley de Reilly en una hipotética "ley de gravitación escolar" podría suponer una indudable ventaja para la localización de las unidades escolares. Para ello sería necesario un contraste experimental de sus resultados.

En el campo de la Enseñanza Primaria, la dispersión de la población haría difícil su aplicación. Sin embargo en la Enseñanza Media, y sobre todo en la Superior podría ser sumamente interesante su contraste, y, de resultar aceptable su utilización, su consideración para la toma de decisiones a nivel gerencial.

3.2. Los Centros de Gravedad.

Al igual que con relación a la Ley de Gravitación, la consideración de estos centros podría servir de base para las decisiones de localización de los centros de Enseñanza Media y Superior, pero no para la Enseñana Básica, ya que hay que suponer que, dada la obligatoriedad de este ciclo, la evolución en el tiempo del centro de gravedad escolar primario habrá seguido una ruta paralela a la del centro de gravedad demográfico estudiado por Tamames[4].

3.3. La solución al problema del transporte.

Si los dos métodos reseñados anteriormente resultan especialmente indicados para la planificación locativa de los Cen-

4 TAMAMES: *op. cit.*, págs. 134-135.

tros de Enseñanza Media y Superior, este método de programación lineal para optimación del coste del transporte puede dar resultados positivos en el área de la Enseñanza Básica.

Existen indudablemente limitaciones derivadas de la estructura de las Escuelas Comarcales. Una de ellas sería la del mínimo aceptable de matrícula en cada unidad de dicho tipo. El sentido que a las Concentraciones Escolares, y sobre todo a nivel del segundo ciclo de Enseñanza Básica que se delinea en el Proyecto de Ley General de Educación, se debe dar exige un mínimo de alumnos que posibilite la utilización de técnicas docentes tales como el "team teaching" y los agrupamientos flexibles.

Por otra parte, la utilización de la programación lineal pura exigiría, para trabajar en este sentido en una provincia con mil localidades a concentrar en cien escuelas comarcales, por ejemplo, la utilización de matrices de orden 1.000 × 100, utilizando un total de 99 ecuaciones con 100.000 incógnitas. Tarea, en los momentos actuales, poco menos que de imposible solución.

Ante ello cabe pensar en la búsqueda de procedimientos abreviados que faciliten el cálculo y permitan una aproximación razonable.

Sin ánimo de llegar al análisis exhaustivo de estas tres vías de solución, vamos a pasar revista a algunas posibilidades encontradas en la primera y tercera soluciones enumeradas: la ley de gravitación comercial aplicada al ámbito escolar superior, y una técnica aproximativa a la solución por medio de la programación lineal para las concentraciones escolares.

4) *La Ley de Gravitación Comercial y su correlato educativo*

El profesor Cabo [5], de la Universidad de Salamanca, publicó en 1967 un estudio sobre el área de influencia geográ-

---

5 CABO ALONSO, A.: *La Universidad de Salamanca y su área geográfica de atracción.* Universidad de Salamanca, 1967.

fica de la citada Universidad. De él hemos extraído los datos que a continuación manejamos, junto con los obtenidos de un mapa de carreteras y del anuario estadístico de 1967 [6].

La fórmula de Reilly, sobre la base de un solo polo de comparación, podría reducirse a la siguiente:

$$V = \frac{P}{D^2}$$

Modificación que responde al enunciado de dicha "Ley", tal como más arriba hemos indicado.

Utilizamos esta fórmula dando a P los valores de la población total de cada provincia, y a D el de la distancia en kilómetros desde la capital a Salamanca, por carretera. El valor de V sería entonces el de un coeficiente de acercamiento o proximación al área de la Universidad de Salamanca. La correlación entre tal coeficiente y la matrícula real de tal provincia en la Universidad Salmantina nos daría el valor de la hipótesis de la Ley de Gravitación Escolar.

CUADRO 1

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Zamora	73,49	326	1	2
Madrid	68,10	253	2	3
Valladolid	28,45	51	3	11
Ávila	23,51	157	4	7
León	15,42	205	5	5
Cáceres	11,77	358	6	1
Oviedo	10,39	206	7	4
Toledo	9,03	47	8	13
Palencia	8,76	27	9	20
Badajoz	7,06	164	10	6
Burgos	6,64	46	11	14

6 *Anuario estadístico de España.* Instituto Nacional de Estadística, 1967, págs. 461 y sigs.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Segovia	5,84	20	12	23
Vizcaya	5,70	101	13	8
Sevilla	5,61	21	14	22
Barcelona	5,35	29	15	18
Valencia	4,50	15	16	25
Coruña	4,49	50	17	12
Orense	3,70	35	18	15
Ciudad Real	3,51	20	19	24
Pontevedra	3,41	35	20	16
Córdoba	3,34	15	21	26
Santander	3,34	76	22	9
Lugo	3,23	12	23	29
Jaén	2,96	14	24	27
Zaragoza	2,88	10	25	35
Murcia	2,58	26	26	21
Guadalajara	2,55	12	27	30
Guipúzcoa	2,53	57	28	10
Cuenca	2,25	11	29	32
Cádiz	2,21	4	30	42
Navarra	2,08	28	31	19
Alicante	1,91	33	32	17
Granada	1,83	8	33	36
Logroño	1,71	12	34	31
Albacete	1,68	11	35	33
Málaga	1,58	14	36	28
Soria	1,37	2	37	44
Huelva	1,25	5	38	39
Álava	1,24	11	39	34
Lérida	0,87	8	40	37
Teruel	0,77	5	41	40
Huesca	0,76	1	42	46
Castellón	0,74	5	43	41
Tarragona	0,70	2	44	45
Almería	0,53	3	45	43
Gerona	0,46	6	46	38

(1) Provincia a la que se hace referencia.

(2) Coeficientes obtenidos mediante la fórmula $\dfrac{\text{Habitantes}}{\text{Distancia}^2}$.

(3) Números de alumnos matriculados en Salamanca, procedentes de la provincia de referencia.

(4) Número de orden según (2).

(5) Número de orden según (3).

Repetimos nuevamente el exclusivo valor de contraste puramente inicial de esta hipótesis. Los resultados podrían venir alterados en función de los datos utilizados. En lugar de la población total de la provincia, quizá hubiera sido más elocuente la consideración de la población estudiantil. Las distancias por carretera quizá sean menos expresivas que las distancias en horas-ferrocarril, medio de transporte más utilizado por el estudiante medio, etc.

De todas formas, y a título puramente orientativo, exponemos los resultados de esta exploración inicial que exige ser contrastada de nuevo, buscando sobre todo la relación bipolar.

En el cuadro n.° 1 exponemos, al lado de cada provincia española, el coeficiente V obtenido según la fórmula ya descrita, y el número de alumnos matriculados en Salamanca procedentes de la provincia de referencia. Excluimos de esta relación las provincias insulares, ya que los criterios seguidos para obtener el valor de la variable D no resultarían significativos.

Obteniendo el coeficiente de correlación por rangos para los datos así presentados [7], tenemos:

$$r_s = 1 - \frac{6\left(\sum d_i^2\right)}{N\left(N^2 - 1\right)} = 1 - \frac{6\,(2.177)}{46\,(2.116 - 1)} = 0{,}87$$

El alto valor de este coeficiente de correlación nos hace ver el interés que esta "Ley de Gravitación Escolar" puede revestir. Sería interesante estudiar con más detenimiento y ma-

---

7 DIXON, W. J. y MASSEY, F. J.: *Introducción al análisis estadístico.* Ediciones del Castillo, Madrid, 1966, págs. 461 y sigs.

yor número de datos esta relación, tanto a nivel de Enseñanza Media como Universitaria [8].

5) *Las Concentraciones Escolares y el problema del transporte*

La limitación de orden puramente tecnológico que señalábamos en el punto 3.3. al hacer relación al problema del transporte, dado el alto número de variables a manejar podría tal vez ser obviado en algún momento mediante la utilización de medios adecuados que facilitaran el cómputo y la relación de variables.

En tanto tales medios se encuentren, por lo general, vedados al investigador, podemos trabajar con procedimientos simplificados que nos proporcionen una aproximación razonable al problema de la optimación de los costes.

Aparte de esta simplificación es también necesario considerar que, si bien pueden reducirse gastos teóricos mediante la dispersión de alumnos de una misma localidad en dos concentraciones distintas, tal criterio, válido cuando se trata de transportes individualizados, han de ser contemplados con una óptica distinta en nuestro caso. En efecto: para cumplir la función objetivo o económica

$$Z = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}, \text{ para } j = 1, 2, \ldots m = \text{(un mínimo)}$$

donde c_{ij} es el coste unitario, por alumno, que puede ser expresado en Kms./individuo, de enviar a un alumno desde la localidad i a la concentración j, podría darse el caso de que la

8 En la actualidad, y en dos Memorias de Licenciatura que se están realizando bajo nuestra dirección en la Sección de Pedagogía de la Universidad Pontificia de Salamanca, se estudia la posibilidad de su generalización a la Enseñanza Media, considerando el área de atracción de Colegios Libres Adoptados y Secciones Filiales.

optimación exigiera, para cumplir al tiempo los límites máximos y mínimos de capacidad de las concentraciones, distribuir estos alumnos entre diversas concentraciones. Así, una localidad que tuviera sólo cuatro alumnos podría verse obligada, para minimizar el coste, cumpliendo al tiempo las restricciones impuestas al problema, a distribuir sus cuatro alumnos entre cuatro concentraciones distintas. Ello provocaría un abaratamiento teórico del transporte. Pero el gasto real se incrementaría, ya que el coste de trasladar a un alumno a una localidad es sensiblemente igual al de enviar a cuatro si se emplea un medio colectivo de transporte.

Allí donde no se cuente con transportes colectivos generales que puedan ser utilizados por los alumnos, lo que supondría un coste individualizado por billete expedido, sino que haya de ser realizado sobre un transporte exclusivamente escolar, el traslado en grupo será más rentable. De aquí que ello imponga nuevas restricciones al problema con relación a la solución, lo que exigiría multiplicar el número de iteraciones.

Las soluciones aproximativas más comunmente utilizadas son: el método del Noroeste, o de la esquina superior izquierda, conocido por este nombre en razón de la disposición de los cálculos [9], el método MODI, que supone reducción de cálculos por su especial disposición [10], y el método aproximativo de Vogel o de las penalizaciones [11], entre otros.

Este último es el que consideramos más apropiado por su relativa facilidad de aplicación y por su fácil adaptación a las necesidades del planteamiento en las concentraciones escolares. Con ligeras variantes, en función de las limitaciones reseñadas, es el que hemos adoptado.

Antes de pasar a aplicarlo directamente, tal como lo hemos hecho en las concentraciones de Sequeros (Salamanca), va-

---

9 ALCOCER CHILLÓN, F. J. y LÓPEZ MORENO, M. J.: *Aplicaciones de la programación al campo económico*. Ed. E. J. E. S., Madrid, 1968, págs. 7 y sigs.

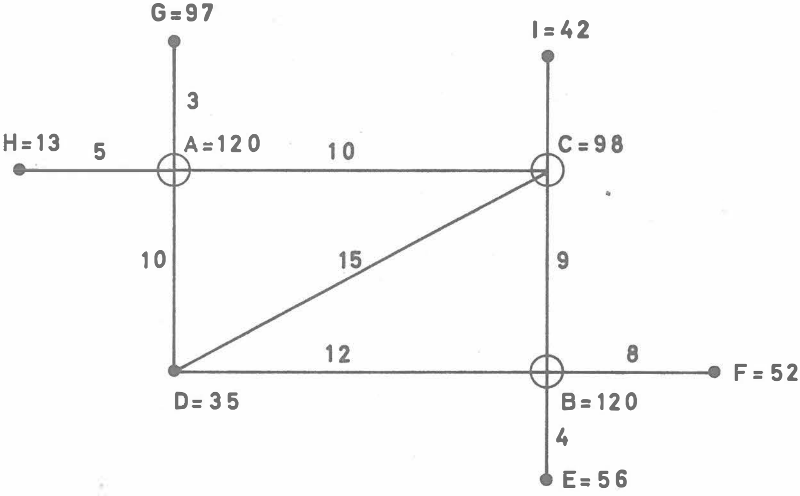
10 Unione Industriale de Torino: *La programazione lineare nell'industria*. Torino, 1954, págs. 66 y sigs.

11 LLEWELLYN, R. W.: *Programación lineal*. Ed. Marcombo, Barcelona, 1968, págs. 46 y sigs.

mos a iniciar su desarrollo en forma de algoritmo en un caso ficticio.

Se pretenden concentrar las localidades que aparecen en el plano adjunto en las señaladas como A, B y C. Las cifras expresadas sobre las líneas indican las distancias kilométricas, y las que se indican a la derecha de cada una de las localidades, A, B, ..., I, la población escolar de las mismas.

Consideramos como precio unitario de transporte el número de kilómetros, ya que el coste real vendrá dado en función del mismo.



Con estos datos podemos elaborar una matriz de costes, que sería la siguiente:

	A	B	C
A	0	19	10
B	19	0	9
C	10	10	0
D	10	12	15
E	23	4	13
F	27	8	17
G	5	24	15
H	3	22	13
I	17	16	7

(Matriz 5.1)

Esta matriz de costes, como puede observarse, se realizó sobre las distancias más cortas calculadas directamente sobre el plano.

El total de los alumnos a concentrar es de 633. Tras examinar las circunstancias diversas que concurren en este caso, se determina, por ejemplo, que la concentración debe realizarse con unos límites, mínimos y máximos respectivamente, de 175 a 300 alumnos.

Para determinar una aproximación razonable al mínimo coste, operamos como sigue:

1. Con los datos que ya tenemos en la matriz de costes, y los que conocemos de población escolar, realizamos la siguiente matriz orlada:

	A	B	C	Z	
A	0	19	10	0	120
B	19	0	9	0	120
C	10	10	0	0	98
D	10	12	15	0	35
E	23	4	13	0	56
F	27	8	17	0	52
G	5	24	15	0	97
H	3	22	13	0	13
I	17	16	7	0	42
	175	175	175	108	

(Matriz 5.2)

En la matriz 5.2 encontramos, como variantes con relación a la 5.1, las que indicamos a continuación:

a) La columna Z, que representa un destino o concentración ficticia, y cuya finalidad es acumular, mediante el proceso que detallamos a continuación, algunas localidades en ella, y que pasarán después a A, B o C, para responder a las necesidades ya expresadas de capacidad máxima y mínima de cada concentración. Este destino ficticio tendría una distancia teórica de cero kilómetros a todas y cada una de las localidades expresas en el mapa. Se trata, por tanto, de un simple convencionalismo necesario para trabajar con los límites prefijados.

b) En la última columna de la matriz indicamos la población escolar de cada localidad.

c) En la última fila expresamos el número de alumnos mínimo que cada concentración, A, B y C han de tener. En esta fila, y en la columna Z indicamos el residuo de alumnos, tras esta distribución mínima entre las restantes. En este caso concreto, este residuo es

$$633 - (175 \times 3) = 108$$

2. Con fines puramente operatorios separamos las dos matrices siguientes:

	A	B	C	Z
A	0	19	10	0
B	19	0	9	0
C	10	10	0	0
D	10	12	15	0
E	23	4	13	0
F	27	8	17	0
G	5	24	15	0
H	3	22	13	0
I	17	16	7	0

(Matriz 5.3)

	A	B	C	Z	
A					120
B					120
C					98
D					35
E					56
F					52
G					97
H					13
I					42
	175	175	175	108	

(Matriz 5.4)

En la matriz 5.3 calculamos las "penalizaciones" correspondientes a cada fila y cada columna. Tales penalizaciones se obtienen hallando la diferencia absoluta entre los dos valores más pequeños de cada fila y de cada columna. Así, en la fila de la localidad G, los valores más pequeños son 0 y 5 respectivamente. La penalización de tal fila será $5 - 0 = 5$. En la columna B, la penalización será $4 - 0 = 4$. En la fila B, será

0 — 0 = 0. Así completamos la matriz 5.3, expresando las penalizaciones de fila y columna respectiva:

	A	B	C	Z	
A	0	19	10	0	0
B	19	0	9	0	0
C	10	10	0	0	0
D	10	12	15	0	10
E	23	4	13	0	4
F	27	8	17	0	8
G	5	24	15	0	5
H	3	22	13	0	3
I	17	16	7	0	7
	3	4	7	0	

(Matriz 5.5)

3. Tras expresar en la matriz 5 las penalizaciones, buscamos la mayor de todas, sea de fila o de columna. En este caso, la mayor es la de la fila D, con una penalización de 10.

Sobre las matrices 5.5 y 5.4, operamos como sigue:

a) Localizamos en la fila D, la de mayor penalización, el valor más pequeño. En este caso viene dado por la fila D y la columna Z. Éste será el primer transporte a realizar: de la localidad D a la concentración ficticia Z. Pasamos, en la matriz 5.7, los 35 alumnos de la localidad D a la concentración Z, con lo que todos los alumnos de D quedan atendidos en la citada concentración. Y esta concentración Z, con 108 alumnos de capacidad, queda con 108 — 35 = 73 plazas escolares disponibles. Tachamos por tanto el valor 35 en la matriz 5.7, pasando a la casilla C Z de dicha matriz, e igualmente hacemos con 108, capacidad de Z, sustituyendo, en este caso, tal capacidad por 73, que es la que tiene tras este traslado.

En la matriz 5.6 suprimimos la fila D, tachándola.

b) La desaparición de la fila D puede afectar a las penalizaciones de las correspondientes columnas, si ha suprimido alguno de los valores mínimos. Por ello calculamos nuevamente las penalizaciones de columnas.

	A	B	C	Z		
A	0	19	10	0	0	
B	19	0	9	0	0	
C	~~10~~	~~10~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	
D	~~10~~	~~12~~	~~15~~	~~0~~	~~10~~	
E	23	4	13	0	4	
F	~~27~~	~~8~~	~~17~~	~~0~~	~~8~~	
G	5	24	15	0	5	
H	3	22	13	0	3	
I	17	16	7	0	7	7·7·2
	3	4	7	0		
			7·7·9			
	3	4	2	0		

(Matriz 5.6)

	A	B	C	Z		
A					120	
B					120	
C			98		~~98~~	0
D				35	~~35~~	0
E					56	
F				52	~~52~~	0
G					97	
H					13	
I					42	
	175	175	~~175~~	~~108~~		
			77	~~73~~		
				21		

(Matriz 5.7)

En nuestro ejemplo no ha cambiado ninguna. Pero es necesario, siempre que se satisfacen las exigencias de transporte de una fila y que, por tanto, desaparece tal fila de la matriz de costes, volver a calcular las penalizaciones de columna, y, a la inversa, si se satisface la capacidad prefijada de un destino, con lo que la columna desaparecerá, hay que volver a calcular las penalizaciones de fila.

c) La segunda penalización en importancia, desaparecida la fila D, es la de la fila F, cuyo valor es de 8. Procederemos de igual manera. El valor más pequeño de la fila F (fila F, columna Z) es cubierto en la matriz 5.7 por el valor de la población escolar de F, que es absorbido por la concentración Z. Se tacha el valor F exterior, y se deduce de las plazas disponibles de Z.

Tachamos la fila F en la matriz 5.6, que ha sido ya atendida en su demanda, y calculamos las nuevas penalizaciones de columna. Tampoco en este caso son afectadas.

d) Al determinar la penalización mayor, de fila o columna, desaparecidas ya las filas D y F, nos encontramos en la alternativa de considerar como máxima penalización la de la fila I o la de la columna Z, que tienen como penalización 7. Ante esta coyuntura hay que calcular las penalizaciones secundarias de la fila I y de la columna C.

La penalización secundaria se obtiene mediante la diferencia absoluta entre el segundo valor mínimo de la fila o columna que se estudia y el valor mínimo de la columna o fila que contiene el segundo valor mínimo citado.

En el ejemplo que desarrollamos, la penalización de segundo orden de la columna C vendrá dada por la diferencia entre 7 (segundo valor mínimo de la columna, el primer valor mínimo sería 0), y el valor mínimo de la fila I (fila en la que está incluido 7, segundo valor mínimo de la columna C).

El valor mínimo de la fila I es 0, luego la segunda penalización será 7 para la columna C.

En la fila I, su segundo valor mínimo es 7. En la columna C, en la que 7 está incluido, es 0. Luego en la fila I la penalización secundaria es también 7.

Así pues, las penalizaciones de la fila I y la columna C coinciden también en la secundaria. En ambos casos la penalización es 7.7. Hemos de calcular la penalización de tercer orden para señalar el orden de prioridad. Para ello seguimos el mismo procedimiento reseñado, comparando ahora con el segundo valor mínimo, excluido el que se compara. Así obtenemos como penalización de la fila I, 7.7.2. La columna C tiene como penalización 7.7.9. Al ser mayor esta última, operamos con la columna C al igual que hemos hecho antes con las filas D y F. La casilla de intersección de la fila C con la columna C es, naturalmente, la de menor valor. En ella incluimos los 98 alumnos de C, en la matriz 5.7, con lo que quedan cubiertas las necesidades de la fila C, y la capacidad propuesta para la concentración expresada en la columna C se reduce a 77 alumnos.

Tachamos en la matriz 5.6 la fila C, ya que sus necesidades han quedado cubiertas.

d) Calculamos las penalizaciones de columna, tras la desaparición de la fila C. Ahora sí han sido afectadas, ya que la penalización de la columna C disminuye, convirtiéndose en 2, en lugar de 7.7.9.

Continuamos operando de forma similar, introduciendo sucesivamente la fila I, que habrá de repartir su contenido entre las columnas C y Z, al no tener Z más capacidad disponible que 21 alumnos, y suprimiendo la columna Z, que queda así con sus exigencias cubiertas. Por ello, tachamos la mencionada columna y obtendremos las nuevas penalizaciones de fila.

El proceso concluye cuando hemos cubierto las necesidades de todas las filas y atendiendo las exigencias de todas las columnas.

Como matriz solución inicial obtenemos la matriz 5.8.

	A	B	C	Z	
A	65		55		120
B		119	1		120
C			98		98
D				35	35
E		56			56
F				52	52
G	97				97
H	13				13
I			21	21	42
	175	175	175	108	

(Matriz 5.8)

Esta matriz 5.8 sería una solución aproximativa válida si el coste del transporte fuera realmente unitario, y si la capacidad de las concentraciones A, B y C fuera exactamente de 175 alumnos.

Ahora bien, el número de 175 es el mínimo de alumnos. Y sobre la base de transportes colectivos expresamente diseñados para concentraciones, desplazar un alumno de B a C, acudiendo los 119 restantes a la misma localidad B, no supondría disminución de costes, sino encarecimiento.

Es necesario por tanto "retocar" esta solución buscando

a) la distribución de los alumnos de la concentración hipotética Z entre las tres restantes.

b) agrupar en una sola concentración todos los alumnos de una misma localidad.

Con este doble criterio, el reparto de los alumnos que en la solución teórica inicial van a Z lo realizaríamos por distancias mínimas a A, B y C. Los de F irían a B, los de I irían a C y los de D serían concentrados en A. Con ello, B y C incrementarían su matrícula, sin superar los 300 señalados como máximo.

Pero al aplicar el criterio *b)*, la concentración C quedaría disminuida por debajo de los límites previstos. Y por ello, en esta segunda fase se impone un cierto "tanteo" sobre la base de la matriz solución aproximativa para redistribuir la columna Z y reunir en una misma concentración a todos los alumnos de una localidad.

Una posible solución final basada en la matriz 5.8 podría ser la siguiente:

	A	B	C	
A	65 + 55			120
B		120		120
C			98	98
D			35	35
E		56		56
F		52		52
G	97			97
H	13			13
I			21 + 21	42
	230	228	175	

(Matriz 5.9)

6) *La aplicación del método aproximativo de Vogel a un caso real*

El valor real de este método crece a medida que se amplía el campo de aplicación del mismo. Si la solución obtenida en el caso supuesto anteriormente desarrollado podría conseguirse por tanteos sobre el plano, al ampliar sus límites a una zona de Inspección, a una provincia, o aún mejor, a toda una región natural, la complicación que supone su obtención sobre el plano no tiene correlato sobre el método Vogel. El esquema aplicativo es el mismo, y sólo se incrementa el tamaño de las matrices.

Vamos a plantear el caso sobre una zona concreta de Inspección: la zona 7.ª (Sequeros) de la provincia de Salamanca. Dicha zona coincide en lo esencial, salvo alguna localidad, con el partido judicial de Sequeros. En las matrices que utilizamos a continuación han sido sustituidos los nombres de las distintas localidades por una clave numérica que se transcribe en el cuadro 2.

El estudio demográfico y de infraestructura de red viaria de la zona nos lleva a la conclusión de que los puntos más acertados para realizar las concentraciones son La Alberca, Linares de Riofrío, Sequeros y Tamames.

La Alberca, Linares y Tamames son, sin duda, los núcleos de mayor importancia en sus entornos respectivos. La Alberca y Linares, sobre estos datos, cuentan con el factor favorable del auge turístico que van cobrando.

Sequeros, por su situación en lo relativo a comunicaciones y la importancia administrativa, además de ser polo de promoción provincial, es también clara cabeza de concentración.

Al acometer la primera etapa de la microprogramación, a nivel de zona, de las concentraciones, sería conveniente pensar en conceder la prioridad a los alumnos de los cuatro últimos cursos. Éstos alcanzan en las localidades de la zona un total de 1.294.

La instrumentalización de un ciclo básico unificado de enseñanza hará que las previsiones de matrícula actual sean insuficientes al fundirse en una sola línea los actuales alumnos de Enseñanza Primaria y los de Enseñanza Media Elemental.

Valorando en un 12,5 % el incremento de matrícula en estas zonas por suma de alumnos que en las actuales circunstancias cursarían Enseñanza Media, consideramos necesario planificar con un promedio de 35 alumnos como máximo por aula, que posibilitara una tasa máxima de 40 alumnos por aula [12].

El mínimo exigible para una estructura escolar suficientemente flexible y homogénea, en función de las exigencias actuales, sería de dos unidades escolares por curso, lo que alcanzaría un total mínimo de 280 alumnos.

Estas consideraciones nos harían pensar en cuatro concentraciones escolares de 280 alumnos, más una concentración ficticia de 174.

---

[12] Según datos obtenidos del "Libro Blanco", cursaban Enseñanza Media un total aproximado de 553.400 alumnos de 10 a 13 años, lo que constituye 1/8 de la población escolar de 6 a 13 años, aproximadamente.

En el cuadro 2 se expresa, además de la localidad y la clave correspondiente, el número de alumnos de los cuatro últimos cursos.

Sobre el plano o mapa de la zona, obtenemos la distancia en kilómetros de cada localidad a las cuatro concentraciones previstas. Con estos datos elaboramos la matriz de costes (matriz 6.1).

En la mencionada matriz se ha incorporado ya la concentración ficticia, y se indican las correspondientes penalizaciones de fila y columna.

Operamos con ella tal como indicábamos en el apartado anterior, cubriendo la demanda y la oferta de puestos escolares. Así obtenemos la matriz aproximativa de solución teórica 6.2.

Partiendo de ella, distribuimos la columna ficticia entre las cuatro concentraciones siguiendo un criterio de distancias mínimas y agrupando aquellas localidades que aparecen distribuidas entre dos concentraciones en la más cercana, sin romper el criterio de totalización que señalábamos en cuanto a máximos y mínimos. Sobre esta base, obtenemos como matriz solución aproximativa real la matriz 6.3, con cuatro concentraciones de 284, 399, 283 y 328 alumnos respectivamente.

CUADRO 2

1.	La Alberca	97
2.	Aldeanueva	13
3.	Arroyomuerto	7
4.	El Cabaco	36
5.	Casas del Conde	7
6.	Cepeda	49
7.	Cereceda	21
8.	Escurial	29
9.	Garcibuey	29
10.	Herguijuela S.	44
11.	Rebollosa	6
12.	Herguijuela C.	10
13.	San Domingo	1
14.	Linares	51
15.	Madroñal	8
16.	Miranda	85
17.	Mogarraz	25
18.	Monforte	11
19.	Nava de Francia	14
20.	La Sgrada	7
21.	Carrascalejo	9
22.	Sanchón	5
23.	S. Esteban	57
24.	S. Martín	21
25.	S. Miguel de V.	46
26.	San Muñoz	31
27.	Santibáñez	31
28.	Sequeros	22
29.	La Sierpe	5
30.	Sotoserrano	57
31.	Tamames	71
32.	Tornadizo	27
33.	Valero	32
34.	Villanueva C.	32
35.	Barbalos	13
36.	Honduras	9
37.	La Bastida	5
38.	Berrocal de H.	16
39.	Coca de Huebra	4
40.	Cilleros de la B.	11
41.	Endrinal	23
42.	Casas de Monleón	10
43.	Frades	27
44.	Membribe	2
45.	Monleón	15
46.	Narros	17
47.	Cortos de la Sierra	4
48.	Peña de Cabra	6
49.	Peralejos de Solís	3
50.	Sanchogómez	6
51.	Navarredonda	32
52.	Rinconada	15
53.	Los Santos	66
54.	Tejeda y Segoyuela	8
55.	Segoyuela de los C.	6
	Total de alumnos	1.294

	(1)	(24)	(28)	(31)	Ficticia	Penal.
1	0	25	12	20	0	0
2	16	22	13	5	0	5
3	18	31	3	14	0	3
4	10	24	11	11	0	10
5	13	29	2	18	0	2
6	9	26	12	29	0	9
7	12	21	9	12	0	9
8	25	4	21	14	0	4
9	15	22	5	22	0	5
10	8	32	21	28	0	8
11	12	36	25	22	0	12
12	32	7	33	25	0	7
13	28	2	26	20	0	2
14	25	0	26	19	0	0
15	8	34	20	27	0	8
16	9	22	10	27	0	9
17	5	27	10	28	0	5
18	5	27	13	23	0	5
19	8	36	10	18	0	8
20	38	36	35	18	0	18
21	38	37	34	17	0	17
22	35	32	33	15	0	15
23	22	9	19	26	0	9
24	11	31	4	21	0	4
25	26	5	24	22	0	5
26	34	32	32	15	0	15
27	19	12	15	19	0	12
28	12	26	0	16	0	12
29	34	9	35	27	0	9
30	10	30	20	29	0	10
31	20	19	16	0	0	0
32	28	7	26	24	0	7
33	20	7	16	24	0	7
34	11	25	1	18	0	1
35	40	21	36	20	0	20
36	32	7	33	26	0	7
37	16	16	9	8	0	8

	(1)	(24)	(28)	(31)	Ficticia	Penal.
38	33	26	28	12	0	12
39	37	30	32	16	0	16
40	15	16	8	7	0	7
41	40	10	37	28	0	10
42	40	10	37	28	0	10
43	42	17	43	36	0	17
44	45	20	46	39	0	20
45	34	9	35	28	0	9
46	40	21	28	20	0	20
47	46	16	34	26	0	16
48	37	19	35	18	0	18
49	37	22	33	17	0	17
50	40	21	28	20	0	20
51	30	12	16	10	0	10
52	29	11	15	9	0	9
53	36	16	29	32	0	16
54	26	10	16	6	0	6
55	30	14	20	10	0	10
Penaliz.	5	2	1	5	0	

(Matriz 6.1)

	(1)	(14)	(28)	(31)	Ficticia	Total
1	97					97
2				13		13
3			7			7
4	36					36
5			7			7
6			49			49
7				21		21
8		29				29
9			29			29
10	44					44
11	6					6
12		10				10
13		1				1
14		51				51
15	8					8
16			85			85
17	21		4			25
18	11					11
19				14		14
20					7	7
21					9	9
22				5		5
23		54	3			57
24			21			21
25		46				46
26				21	10	31
27			21	10		31
28			22			22
29		5				5
30	57					57
31				71		71
32		27				27
33				32		32
34			32			32
35					13	13
36		9				9
37				5		5

	(1)	(14)	(28)	(31)	Ficticia	Total
38				16		16
39					4	4
40				11		11
41		23				23
42		10				10
43					27	27
44					2	2
45		15				15
46					17	17
47					4	4
48					6	6
49					3	3
50					6	6
51				32		32
52				15		15
53					66	66
54				8		8
55				6		6
Total	280	280	280	280	174	1.294

(Matriz 6.2)

	(1)	(14)	(28)	(31)	Total
1	97				97
2				13	13
3			7		7
4	36				36
5			7		7
6			49		49
7				21	21
8		29			29
9			29		29
10	44				44
11	6				6
12		10			10
13		1			1
14		51			51
15	8				8
16			85		85
17	25				25
18	11				11
19				14	14
20				7	7
21				9	9
22				5	5
23		57			57
24			21		21
25		46			46
26				31	31
27			31		31
28			22		22
29		5			5
30	57				57
31				71	71
32		27			27
33				32	32
34			32		32
35				13	13
36		9			9
37				5	5

	(1)	(14)	(28)	(31)	Total
38				16	16
39				4	4
40				11	11
41		23			23
42		10			10
43		27			27
44		2			2
45		15			15
46		17			17
47		4			4
48				6	6
49				3	3
50				6	6
51				32	32
52				15	15
53		66			66
54				8	8
55				6	6
Total	284	399	283	328	1.294

(Matriz 6.3)

7) *Otras variantes*

La forma desarrollada es quizá la más fácil de llevar a cabo. Se basa, como se puede observar, en evitar por medio de la consideración de las penalizaciones mayores las distancias excesivas entre recorridos, marcando un orden de prioridades, respondiendo al tiempo a unas exigencias máximas y mínimas.

Dos posibilidades nuevas se abren mediante esta técnica. Una, calculando el coste mediante el producto de "alumnos a trasladar" multiplicados por "kilómetros a recorrer", con lo que trabajaríamos sobre la totalización de los costes unitarios.

Otra posibilidad estriba en la consideración de "unidades de traslado", en función de las capacidades de los medios de comunicación utilizados.

Una última posibilidad interesante del modelo matemático últimamente propuesto consiste en la facilidad que supone, considerando la columna ficticia, para asignar alumnos a las Escuelas-Hogar existentes. Una gran penalización y un corto número de alumnos que no cubriera una "unidad de transporte" mínima, exigiría la escolarización en Escuela Hogar.